数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 87-93

Class formation の高次元化 II

東工大理　小屋　良祐 (Yoshihiro Koya)

1. はじめに

最初に、表題と実際の講演内容について『ずれ』があったことをおわびします。表題では、"class formation" について言及するごとくの印象を与えたにもかかわらず、色々と間違いがあって、それらについては述べることができませんでした。しかし、本稿を読んで頂ければ分かると思いますが、多くの部分が class formation に密接に関係しています。

なお、本稿の詳しい内容と、省略された証明などについては、

[Ko2] *Hasse's Norm Theorem for* K_2

という題の論文にまとめて、いずれどこかに投稿するつもりですので、それをご覧下さい。

また、筆者の愚かさゆえに、多くの記載漏れや不備な点があることをおわびします。特に、Krull 次元が 2 次元となる正則局所環について、その若干の例を記述する予定でありましたが、これまた、筆者の愚鈍ゆえに実現することができませんでした。

2. Modified hypercohomology について

この節では、"modified hypercohomology" の簡単な性質を見ていきます。詳しいことは、[Ko] にありますので、それを参考にして頂ければと思います。

特に断わらない限り、この節では、有限群を表すのには G で $A^{\bullet}$ は G-modules の有界な複体を表すものとします。

"Modified hypercohomology" の定義そのものは、[Ko] にありますので、それを参考にしてください。

Remark. [Ko] では、modified hypercohomology を表す記号として、太文字の記号を使っていましたが、以後、紛れがない限り Tate のコホモロジーを表すのと同じ記号を用います。実際に、係数が複体でなく

て、群の作用する加群であれば標準的な同型が存在することが容易に分かります。

Proposition 2.1. (Prop.1.2. of [Ko])
(1)

$$\widehat{H}^0(G, A^\bullet) \simeq \mathrm{Coker}(\mathcal{H}^0(A^\bullet) \xrightarrow{N_G} H^0(G, A^\bullet)),$$

ここで N_G とは、ノルム写像のことである。
(2) 任意の整数 $q \geq 1$ に対して、q 番目の *modified hypercohomology* は、q 番目の群の *hypercohomology* と一致する。

Theorem 2.2. (Thm.1.3 of [Ko]) *G-module* の三角

$$A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1],$$

に対して、次のような長完全系列が存在する：

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \widehat{H}^q(G, A^\bullet) &\longrightarrow \widehat{H}^q(G, B^\bullet) \longrightarrow \widehat{H}^q(G, C^\bullet) \\ &\longrightarrow \widehat{H}^{q+1}(G, A^\bullet) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

良く知られた Tate-Nakayama の定理の拡張として次のような定理を証明することもできます。証明は、[Ko] にあります。

Theorem 2.3. (Generalized Tate-Nakayama's Theorem) G は有限群とし、$A^\bullet$ は *G-modules* の複体であって 0 番目と (-1) 番目の項をのぞいては、すべて消えているとする。a を $\widehat{H}^2(G, A^\bullet)$ の元とする。さらに、各 *p-Sylow* 部分群 G_p に対して次が成り立つものとする：
(1)

$$\widehat{H}^1(G_p, A^\bullet) = 0.$$

(2) $\widehat{H}^2(G_p, A^\bullet)$ は $\mathrm{Res}_{G/G_p}(a)$ で生成される。この元の位数は $|G_p|$ に等しい。すると、すべての整数 $q \in \mathbf{Z}$ とすべての部分群 H に対して、

$$\widehat{H}^q(H, A^\bullet) \simeq \widehat{H}^{q-2}(H, \mathbf{Z})$$

が成り立つ。

Remark. この定理は、次のような複体に対して成り立ちます。これは、証明はスペクトル系列の退化性を用いているからで、上の定理を

証明するぶんには、何も複体そのものが 2 項でなければいけない訳ではないのです。
(1) 正の項はすべて消えている。
(2) $A^\bullet$ は $[-1,0]$ の外で非輪状である。(cf. proof of the Lemma2.2 of [Ko]).

次の定理は、周期性について述べています。これは、Tate のコホモロジーに関しては良く知られた事実が、この modified hypercohomology についても成り立つということです。もっとも、Tate のコホモロジーについては、対応のしかたまで知られていますが、この場合にはそこまで精緻な結果を得ている訳ではありません。それは、べつに対応のしかたを知ることが不可能と言う訳でなく、筆者がその必要性をさしあたり感じなかったためです。

Theorem 2.4. G が巡回群なら、

$$\widehat{H}^{2q}(G,A^\bullet) = \widehat{H}^0(G,A^\bullet),$$
$$\widehat{H}^{2q+1}(G,A^\bullet) = \widehat{H}^1(G,A^\bullet).$$

3. 複体 C_K の構成

この節では、あとで主要な役割を果たす複体を構成します。

A を 2 次元の完備な正則局所環で剰余体が有限体であるようなものとします。$\mathfrak{m}_A$ をその極大イデアル、P をその環の高さ 1 の素イデアルの集合とします。K は A の商体とします。各々の $\mathfrak{p} \in P$ に対して、$A_\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ での局所化の完備化とします。$K_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の商体で、$\kappa(\mathfrak{p})$ は A の $\mathfrak{p}$ での剰余体とします。[Sa1] によると、$K_\mathfrak{p}$ は 2 次元局所体となり、$\kappa(\mathfrak{p})$ は通常の意味での局所体となります。

これから、Lichtenbaum の複体を使いますが、考えている体を明記したほうが便利なときには、Lichtenbaum のオリジナルの記法を用いることにします。詳しいことは、[L1] [L2] [L3] などを参考にしてください。

Definition 3.1. 複体 $Q_\mathfrak{p}[1]$ は次の射の写像錐として定義します：

$$\Gamma(2, K_{\mathfrak{p}_s}) \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})_s{}^\times[-2].$$

Lemma 3.2. 今までの約束の下で、

$$H^2(K_{\mathfrak{p}}, Q_{\mathfrak{p}}) = K_2 A_{\mathfrak{p}},$$
$$H^3(K_{\mathfrak{p}}, Q_{\mathfrak{p}}) = 0.$$

Proof. 次のような、完全系列を考えます。

$$\longrightarrow H^1(K_{\mathfrak{p}}, \kappa(\mathfrak{p})_s^{\times}[-2]) \longrightarrow H^2(K_{\mathfrak{p}}, Q_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow H^2(K_{\mathfrak{p}}, \Gamma(2, K_{\mathfrak{p}_s}))$$
$$\longrightarrow H^2(K_{\mathfrak{p}}, \kappa(\mathfrak{p})_s^{\times}[-2]) \longrightarrow H^3(K_{\mathfrak{p}}, Q_{\mathfrak{p}})$$
$$\longrightarrow H^3(K_{\mathfrak{p}}, \Gamma(2, K_{\mathfrak{p}_s})).$$

また、Lichtenbaum [L2] [L3] より、

$$H^2(K_{\mathfrak{p}}, \Gamma(2, K_{\mathfrak{p}_s})) = K_2 K_{\mathfrak{p}},$$
$$H^3(K_{\mathfrak{p}}, \Gamma(2, K_{\mathfrak{p}_s})) = 0.$$

なので、これと次の完全系列を併せると分かります。

$$0 \longrightarrow K_2 A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow K_2 K_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\partial} \kappa(\mathfrak{p})^{\times} \longrightarrow 0,$$

Q.E.D.

Definition 3.3. イデール複体 $\mathbf{I}_K$ は次のようにして定義されます。

$$\mathbf{I}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \Gamma(2, K_{\mathfrak{p}}) \times \prod_{\mathfrak{p} \in P - S} Q_{\mathfrak{p}},$$

ここで S は P の有限部分集合です。すると、$\mathbf{I}_K$ は、次の式で与えられます。

$$\mathbf{I}_K = \varinjlim_{S} \mathbf{I}_K^S.$$

Definition 3.4. 複体 $\mathbf{C}_K$ は次の射の写像錐として定義されます。

$$\Gamma(2, K) \longrightarrow \mathbf{I}_K.$$

Proposition 3.5.
(1) $\mathbf{C}_K$ は $[1,2]$ の外で非輪状。
(2)

$$H^2(\mathrm{Gal}(K_s/K), \mathbf{C}_K) = C_K.$$

証明は、[Ko2] を参考にしてください。

Theorem 3.6.

$$H^3(G, \mathbf{I}_K) = 0.$$

4. Hasse Principle

この節では、前の節での記法や約束をそのまま踏襲します。それに加えて、A を有限体を剰余体に持つような、2 次元の完備正則局所整域とします。

この節での目標は、ある種の条件の下で $\mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}}$ の『わかりやすい』表示をあたえることと、高次元という状況に似つかわしい形での Hasse のノルム定理を証明する過程の概略を記すことです。これは、modified hypercohomology の応用として示すことができます。

キー・ポイントはつぎの系列の完全性にあります。:

$$0 \longrightarrow H^2(K, \mathbf{Z}(2)[2]) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P} H^2(K_{\mathfrak{p}}, \mathbf{Z}(2)[2]) \xrightarrow{\sigma} H^2(K, \mathbf{C}_K[2])$$

この系列の完全性は、斎藤さんによってより一般の形で証明されています。ここで、注意されたいのは、A が正則でない場合には、うえの系列の左半分はもはや完全系列をなさないということです。くわしい、ことは [Sa1] および [Sa2] に書いてあります。

このように、K の拡大体 L における A の整閉包を考えるときに、それが再び正則になることは期待できないので、"class formation" を考えることはできないのですが、ある種の条件の下で、いままでの証明の方法をそのまま利用することが出来ます。

Theorem 4.1. L/K を有限次ガロア拡大として、さらにその拡大のすべての中間体における A の整閉包が再び正則局所環になるようなものとします。すると、有限群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ と $\mathrm{Gal}(L/K)$*-module* の複体 $\tau_{\leq 0}\mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Gal}(K_s/L), \mathbf{C}_K[2])$ は、一般化された *Tate-Nakayama* の定理の仮定を満足します。

上の定理から、おなじみの $\mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}}$ の表示を得ます。

Corollary 4.2. 上の定理の仮定の下で、

$$\mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}} \simeq C_K / N_{L/K} C_L.$$

上の定理を証明するには、次の補題を証明すればよいことになります。これは、"class formation" の公理系の条件を各場合についてチェックしているのに大変似ています。

Lemma 4.3. L/K に関する条件は、前述のとおりとします。
(1) 任意の整数 $q > 2$ に対して、

$$H^q(M, \mathbf{C}_M[2]) = 0.$$

(2)

$$H^1(M, \mathbf{C}_M[2]) = 0.$$

(3) 次のような同型写像が存在する。:

$$\mathrm{inv}_M : H^2(M, \mathbf{C}_M[2]) \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

(4) 次の図式は可換になる。:

$$\begin{array}{ccc} H^2(M, \mathbf{C}_M[2]) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^2(N, \mathbf{C}_N[2]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \end{array}$$

ただし、M と N は L/K の中間体で、$N \supset M$ であり $[N:M] = n$ なるものとします。

証明は、[Ko2] を参考にしてください。

Corollary 4.5. L/K は巡回拡大とします。さらに、それらは *Theorem 4.1* にある条件と同様な条件を満たすとします。このとき、各々の $\mathfrak{p}$ に対して、$x \in K_2K$ の K_2 イデールでの像が $N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} K_2 L_{\mathfrak{P}}$ に含まれているなら、$x \in N_{L/K} K_2 L$ となります。

Proof. これは、modified hypercohomology の周期性 (Theorem 2.4) からでます。

Q.E.D.

上の事実は、要するに

$$0 \longrightarrow K_2K/N_{L/K}K_2L \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P} K_2K_{\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} K_2 L_{\mathfrak{P}}$$

が完全系列になるということですが、拡大 L/K にきつい条件がついてはいるものの今までに知られている Hasse のノルム定理の拡張になっているといえます。さらに、K 群について、この様な local - global principle が成り立つことは、代数的 K-theory の観点からも興味深いことと思われます。最後に、この様な定理が成り立つと思われる体はほかにも存在すると思われますし、K_2 に限らず、より高次の Milnor の K 群に対しても、穏当な条件を課すことにより、成り立つのではないかと思われます。

References.

[Ko]. Koya, Y.: *A generalization of class formation by using hyper-cohomology*. Invent. Math. **101**, 705-715 (1990)

[Ko2]. Koya, Y.: *Hasse's Norm Theorem for K_2*. (Preprint)

[L1]. Lichtenbaum, S.: *Values of zeta functions at non-negative integers*. In : 'Number Theory' (Lect. Notes in Math., Vol. 1068) 127-138 Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1984

[L2]. Lichtenbaum, S.: *The construction of weight-two arithmetic cohomology*. Invent. Math. **88**, 183-215 (1987)

[L3]. Lichtenbaum, S.: *New results on weight-two motivic cohomology*. (Preprint) (1988)

[Sa1]. Saito, S.: *Arithmetic on two dimensional local rings*. Invent. Math. **85**, 379-414 (1986)

[Sa2]. Saito, S.: *Class field theory for curves over local fields*. J. of Number Theory **21**, 44-80 (1985)

[Sa3]. Saito, S.: *Class field theory for two dimensional local rings*. In: 'Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry' Adv. St. in Pure Math. **12**, 343-373 (1987)